
116.71
38.2%: 119.29
51.25%: 108.98
61.6 %: 99.19
104.19
86.72
72.48

Financial Engineering

ณัฐวุฒิ คูวัฒนเธียรชัย

Lecture 11

การจำลองราคาหลักทรัพย์

(Stock Price Modeling)

ทบทวนความรู้เบื้องต้น

- ราคาสินทรัพย์มีวิวัฒนาการแบบสุ่ม
  - หมายความว่า ราคาหุ้น อัตราดอกเบี้ย อัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศ และราคาสินค้าโภคภัณฑ์ต่างๆ ไม่สามารถพยากรณ์ได้
- ส่วนมากแล้วเราจะทำการวิเคราะห์ผลตอบแทน (การเปลี่ยนแปลงของราคาสินทรัพย์) แทนการวิเคราะห์ราคาสินทรัพย์ เนื่องจากมีความนิ่ง (stationary) มากกว่าราคาสินทรัพย์

ทบทวนความรู้เบื้องต้น

- เนื่องจากราคาสินทรัพย์มีความสุ่ม (randomness) เป็นส่วนประกอบ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้จำลองราคาสินทรัพย์จึงต้องแสดงให้เห็นถึงความสุ่มนี้ และเราจะพยากรณ์ราคาสินทรัพย์ในอนาคตด้วยการใช้ความน่าจะเป็น
- การประเมินค่าผลตอบแทนคาดหมาย (expected returns) และความผันผวน (volatility) และผลกระทบของมันต่อราคาสินทรัพย์เป็นสิ่งสำคัญในการตัดสินใจทางการเงิน

กระบวนการเฟ้นสุ่ม (stochastic process)

- กระบวนการเฟ้นสุ่ม
  - การจัดลำดับความต่อเนื่องของค่าสังเกต (sequence of observations) ด้วยการแจกแจงความน่าจะเป็น
- ตัวอย่าง: การโยนเหรียญไปเรื่อยๆ ในช่วงเวลาเท่าๆ กัน
  - การแจกแจงจะเสถียรเนื่องจากผลลัพธ์ที่เป็นไปได้จะไม่เปลี่ยนในการโยนแต่ละครั้ง (การที่เหรียญออกก้อย 5 ครั้งติดต่อกัน ถึงแม้จะเป็นไปได้น้อย แต่ก็ไม่ได้ทำให้ความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกก้อยอีก 5 ครั้งถัดไปติดต่อกัน เปลี่ยนไป)

กระบวนการเฟ้นสุ่ม (stochastic process)

- การสุ่มเลือกไพ่จากกองออกมาโดยไม่ใส่กลับเข้าไป คือ ตัวอย่างของกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงของการแจกแจง
- การเคลื่อนที่ของราคาสินทรัพย์ในความเป็นจริงเป็นกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงของการแจกแจงความน่าจะเป็น ถึงแม้ว่าจะเป็นการยากที่จะระบุเวลาที่มีการเปลี่ยนแปลงการแจกแจงก็ตาม
  - การศึกษาข้อมูลในอดีตจะมีประโยชน์ในประเด็นนี้ ไม่ใช่เพื่อการพยากรณ์อนาคต แต่เพื่อดูว่าราคาสินทรัพย์ในอนาคตควรมาจากการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบใด

การเคลื่อนที่แบบบราวน์ (Brownian Motion)

- นิยาม
  - เป็นการเคลื่อนที่แบบสุ่มของอนุภาคในของไหล (ของเหลวหรือก๊าซ) ค้นพบโดยนักพฤกษศาสตร์ Robert Brown เมื่อประมาณปี ค.ศ.1827
- กลไกของ Brownian Motion
  - กำหนดให้ Z_t เป็นข้อมูลอนุกรมเวลาซึ่งตัวเลขทุกตัวในอนุกรมเวลานั้นถูกสุ่มมาจากการแจกแจงปกติมาตรฐาน - N(0,1)
  - สมมติว่า W_t เป็นตัวเลขหนึ่ง ณ ช่วงเวลา t

การเคลื่อนที่แบบบราวน์ (Brownian Motion)

- กลไกของ Brownian Motion
  - Model 1: $W_{t+dt} = W_t + Z_{t+dt} \times dt$
    - dt = ช่วงเวลา (หน่วยเป็นปี) ระหว่าง t ถึง t+dt
    - dt = 1/(60×24×365) ถ้าช่วงเวลาระหว่าง t ถึง t+dt = 1 นาที
    - dt ปรากฏในแบบจำลองเพื่อวัดผลกระทบของการตระหนกทางสถิติ (statistical shocks) ถ้าขนาดความกว้างของเวลาที่พิจารณาต่างกัน (การตระหนกทางสถิติ ซึ่งเป็นต้นเหตุของความสุ่ม น่าจะมีขนาดใหญ่เพิ่มขึ้นถ้ามันถูกกระจายไปในช่วงเวลาที่ยาวนานขึ้น)

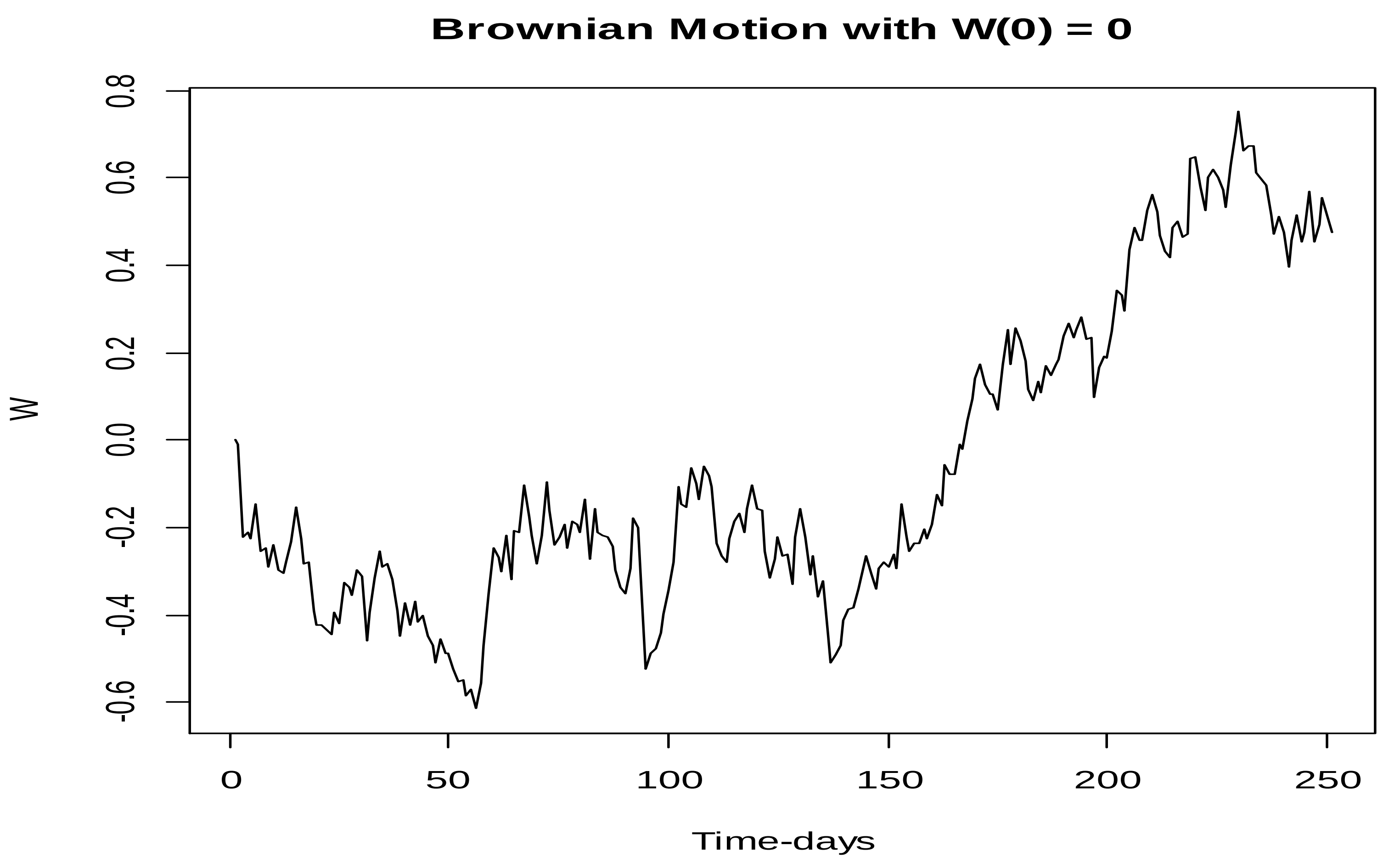
การเคลื่อนที่แบบบราวน์ (Brownian Motion)

- กลไกของ Brownian Motion
  - ถ้าต้องการจำลองการเคลื่อนที่ของราคาสินทรัพย์ที่มีขึ้นตลอดเวลา (continuously) dt จะต้องมีค่าใกล้เคียงศูนย์
    - Model 1 มีปัญหาเนื่องจากความแปรปรวนของ W_{t+dt} (คำนวณด้วยการนำ dt ไปยกกำลังสอง) จะมีค่าใกล้เคียงศูนย์เช่นกัน
    - W จะไม่ใช่ตัวแปรสุ่มอีกต่อไป เนื่องจากมีค่าความแปรปรวนน้อยมาก
  - Model 2: $W_{t+dt} = W_t + Z_{t+dt} \times \sqrt{dt}$
    - เวลาคำนวณความแปรปรวนด้วยการนำ $\sqrt{dt}$ ไปยกกำลังสอง เราจะได้ dt

การเคลื่อนที่แบบบราวน์ (Brownian Motion)

- W_t จะเป็น Brownian Motion ถ้า
  - $W_0 = 0$
  - การเพิ่มขึ้นของ W_t เป็นอิสระจากกัน
    - $W_t - W_s$ เป็นอิสระจาก $W_v - W_u$ $\forall$ s, t, u, v > 0 and $u \le v \le s \le t$
  - $W_t - W_s \sim N(0,t - s)$ for s < t
    - $\Rightarrow W_t \sim N(0,t)$
- Brownian Motion ยังจำลองการเคลื่อนที่ของราคาหลักทรัพย์ได้ไม่สมบูรณ์แบบ เนื่องจากมันค่าที่เป็นไปได้อาจติดลบ

การเคลื่อนที่แบบบราวน์ (Brownian Motion)



กระบวนการแบบวีเนอร์ (Wiener Process)

- กระบวนการแบบวีนเนอร์ (Wiener Process) ตั้งให้เพื่อเป็นเกียรติแก่ Norbert Wiener (1894-1964)
  - $dW_t = W_{t+dt} - W_t = Z_{t+dt} \times \sqrt{dt}$ as $dt \to 0$
  - $dW_t \sim N(0,dt)$
    - $E(dW_t) = 0$
    - $E(dW_t)^2 = dt$
  - ในการประเมินราคาตราสารอนุพันธ์ เราจะสนใจกระบวนการของ dW_t มากกว่า W_t

การแปลงกระบวนการแบบวีเนอร์เพื่อการจำลองราคาหุ้น

- ความผันผวนของราคาหุ้นมีคุณสมบัติที่สำคัญดังนี้
  - ในระยะยาว ราคาหุ้นจะเพิ่ม (รางวัลจากการเสี่ยง) ซึ่งเราเรียกว่าราคาหุ้น drift
    - ถึงแม้ว่า Wiener Process จะไม่ drift แต่เราสามารถแปลงกระบวนการนี้ให้ drift ได้
  - การเคลื่อนที่ของราคาหุ้นเป็นแบบสุ่ม
    - Wiener Process ก็เป็นกระบวนการแบบสุ่ม แต่เราต้องแปลงกระบวนการนี้ให้แยกแยะถึงความแตกต่างของความผันผวนของหุ้นแต่ละตัว

การแปลงกระบวนการแบบวีเนอร์เพื่อการจำลองราคาหุ้น

- ความผันผวนของราคาหุ้นมีคุณสมบัติที่สำคัญดังนี้
  - การพยากรณ์ราคาหุ้นในอนาคตควรจะมีความยากเพิ่มขึ้น
    - ความแปรปรวนของราคาหุ้นในอนาคตอันแสนไกล ควรจะมากกว่าความแปรปรวนของราคาหุ้นในอนาคตอันใกล้
  - ราคาหุ้นไม่มีทางติดลบ
    - ผู้ถือหุ้นมีความรับผิดจำกัด (limited liability)

การแปลงกระบวนการแบบวีเนอร์เพื่อการจำลองราคาหุ้น

- ขั้นตอนการแปลงกระบวนการแบบวีเนอร์
  - คุณสมบัติของผลตอบแทนสามารถอธิบายด้วยค่าเฉลี่ย (μ) และค่าความแปรปรวน (σ^2) ของมัน ซึ่งเราต้องการให้แบบจำลองของเรามีค่าคาดหมายและความแปรปรวนเท่ากับ μ และ σ^2 ตามลำดับ
  - กำหนด $R_t = \mu \times dt + g_t$
    - R_t = ผลตอบแทนของหุ้นต่อช่วงเวลา dt
    - $\mu \times dt$ = ผลตอบแทนคาดหมายของหุ้นในช่วงเวลา dt = ค่าคงที่
    - g_t = ส่วนประกอบที่จำลองการสุ่มของผลตอบแทน (ขึ้นอยู่กับความแปรปรวนของผลตอบแทน)

การแปลงกระบวนการแบบวีเนอร์เพื่อการจำลองราคาหุ้น

- ขั้นตอนการแปลงกระบวนการแบบวีเนอร์
  - เราต้องการให้แบบจำลองของเรามีค่าคาดหมายเท่ากับ μ
    - ทำได้ด้วยการกำหนด $E(g_t) = 0$
  - เราต้องการให้แบบจำลองของเรามีความแปรปรวนต่อปีเท่ากับ σ^2 (ความแปรปรวนของผลตอบแทนต่อช่วงเวลา $dt = \sigma^2 \times dt$)
    - ทำได้ด้วยการกำหนด $var(g_t) = \sigma^2 \times dt$
  - เนื่องจากเราต้องการให้ $E(g_t) = 0$ และ $var(g_t) = \sigma^2 dt$
    - ดังนั้น $g_t = \sigma \times dW_t = \sigma \times Z_t \times \sqrt{dt}$
  - $\therefore R_t = \mu \times dt + \sigma \times dW_t$

การแปลงกระบวนการแบบวีเนอร์เพื่อการจำลองราคาหุ้น

- ความแปรปรวนของราคาหุ้นในอนาคต
  - $S_{t+dt} = S_t(1 + R_t) = S_t(1 + \mu \times dt + \sigma \times Z_t \times \sqrt{dt})$
    - ความแปรปรวนของ S_{t+dt} มากกว่าความแปรปรวนของ S_t เนื่องจาก dt จะมีค่าสูงขึ้นถ้าเราข้ามเวลาไปยังอนาคตไกลขึ้น
  - แบบจำลองที่เราได้มา เรียกว่า Geometric Brownian Motion:

$$R_t = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

$$\Rightarrow dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

    - $dS_t = S_{t+dt} - S_t$ as $dt \to 0$

Geometric Brownian Motion

- คุณสมบัติเบื้องต้น:
  - dS_t/S_t = ผลตอบแทนของหุ้นต่อช่วงเวลาสั้นๆ dt
  - $\mu \times dt$ = ผลตอบแทนคาดหมาย
  - $\sigma \times dW_t$ = ส่วนประกอบของผลตอบแทนที่แสดงถึงความสุ่ม
  - S_t ไม่มีทางติดลบ เนื่องจาก $dS_t = 0$ เมื่อ $S_t = 0$
  - $dS_t/S_t \sim N(\mu \times dt\ ,\ \sigma^2 \times dt)$
  - $dS_t \sim N(\mu \times S_t \times dt\ ,\ \sigma^2 \times S^2_t \times dt)$

Geometric Brownian Motion

- ตัวอย่าง: พิจารณาหุ้นตัวหนึ่งที่มีความผันผวน (σ) เท่ากับ 30% และให้ผลตอบแทนคาดหมาย (μ) 15% ต่อปี จงหาการเพิ่มขึ้นของราคาหุ้นหลังจากผ่านไปหนึ่งสัปดาห์ ถ้าราคาหุ้นตอนเริ่ม (S_t) = 100
  - แบบจำลองแบบช่วงเวลาต่อเนื่อง:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

  - แบบจำลองแบบช่วงเวลาไม่ต่อเนื่อง:

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t}$$

Geometric Brownian Motion

- ตัวอย่าง:

$$\Delta S_t = \left(.15 \times \tfrac{1}{52} + .3 \times Z \times \sqrt{\tfrac{1}{52}}\right) \times 100$$

$$\Rightarrow \Delta S_t = .288 + 4.16Z$$

  - ถ้า $X = \mu + \sigma Z$ แล้ว $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - ดังนั้น การเพิ่มขึ้นของราคาหุ้นตัวนี้ในหนึ่งสัปดาห์จึงเป็นตัวแปรที่สุ่มมาจากการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย = .288 และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน = 4.16

Geometric Brownian Motion

- ตัวอย่าง: แสดงให้เห็นว่า $\Delta S_t/S_t \sim N(\mu\Delta t\ ,\ \sigma^2\Delta t)$

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu\Delta t + \sigma Z\sqrt{\Delta t}$$

  - ถ้า $X = \mu + \sigma Z$ แล้ว $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - ดังนั้น $\Delta\ S_t/S_t \sim N(\mu\ \Delta t\ ,\ \sigma^2\ \Delta t)$

Geometric Brownian Motion

- เราสามารถใช้เทคนิคทางแคลคูลัสพิสูจน์ได้ว่า

$$d\ln S_t = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t$$

$$\Rightarrow \ln S_t - \ln S_0 = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t$$

$$\Rightarrow \ln S_t \sim N\left(\ln(S_0) + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right)$$

$$\Rightarrow S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right]$$

$$= S_0 \exp\left[\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma Z\sqrt{t}\right]$$

Geometric Brownian Motion

- ตัวอย่าง: พิจารณาหุ้นตัวหนึ่งที่มีราคาตอนเริ่ม = 40 ค่าคาดหมาย = 16% และค่าความผันผวน = 20% จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของลอการิทึมของราคาหุ้นตัวนี้ หรือ $\ln S_t$ ในอีก 6 เดือนข้างหน้า

$$\ln S_{0.5} \sim N\left(\ln(40) + \left(.16 + \tfrac{1}{2}(.2)^2\right) \times .5, (.2)^2 \times .5\right)$$

$$\sim N(3.759, .02)$$

Simulating GBM evolution

- การจำลองการเคลื่อนที่ของราคาหุ้นตาม GBM แบบช่วงเวลาไม่ต่อเนื่อง สามารถทำได้ 2 วิธี

$$(1)\ S_1 = S_0 + \left(\mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t}\right) S_0$$

$$(2)\ S_1 = S_0 \exp\left[\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t}\right]$$

- ตัวอย่าง: จงจำลอง (simulate) ราคาวันที่ 3 ของหุ้นตัวหนึ่งที่เคลื่อนที่ตามแบบ GBM หุ้นตัวนี้มีราคาเริ่มต้นที่ 100 มีค่าเฉลี่ยของผลตอบแทน = 10% ต่อปี และมีความผันผวน = 20% ต่อปี

Simulating GBM evolution

- วิธีที่ 1:
  - $\Delta t = 1/250$
  - ราคาของหุ้นตัวนี้ในวันแรก = 100
  - สุ่มตัวเลขจาก N(0,1) มา 3 ตัว = .11656, -1.27768, .244257 ตามลำดับ
  - ราคาของหุ้นในวันถัดไปเท่ากับ

$$S_1 = 100 + \left(.1 \times \tfrac{1}{250} + .2 \times (.11656) \times \sqrt{\tfrac{1}{250}}\right)100 = 100.19$$

$$S_2 = S_1 + \left(.1 \times \tfrac{1}{250} + .2 \times (-1.27768) \times \sqrt{\tfrac{1}{250}}\right)S_1 = 99.98614$$

$$S_3 = S_2 + \left(.1 \times \tfrac{1}{250} + .2 \times (.244257) \times \sqrt{\tfrac{1}{250}}\right)S_2 = 99.98963$$

Simulating GBM evolution

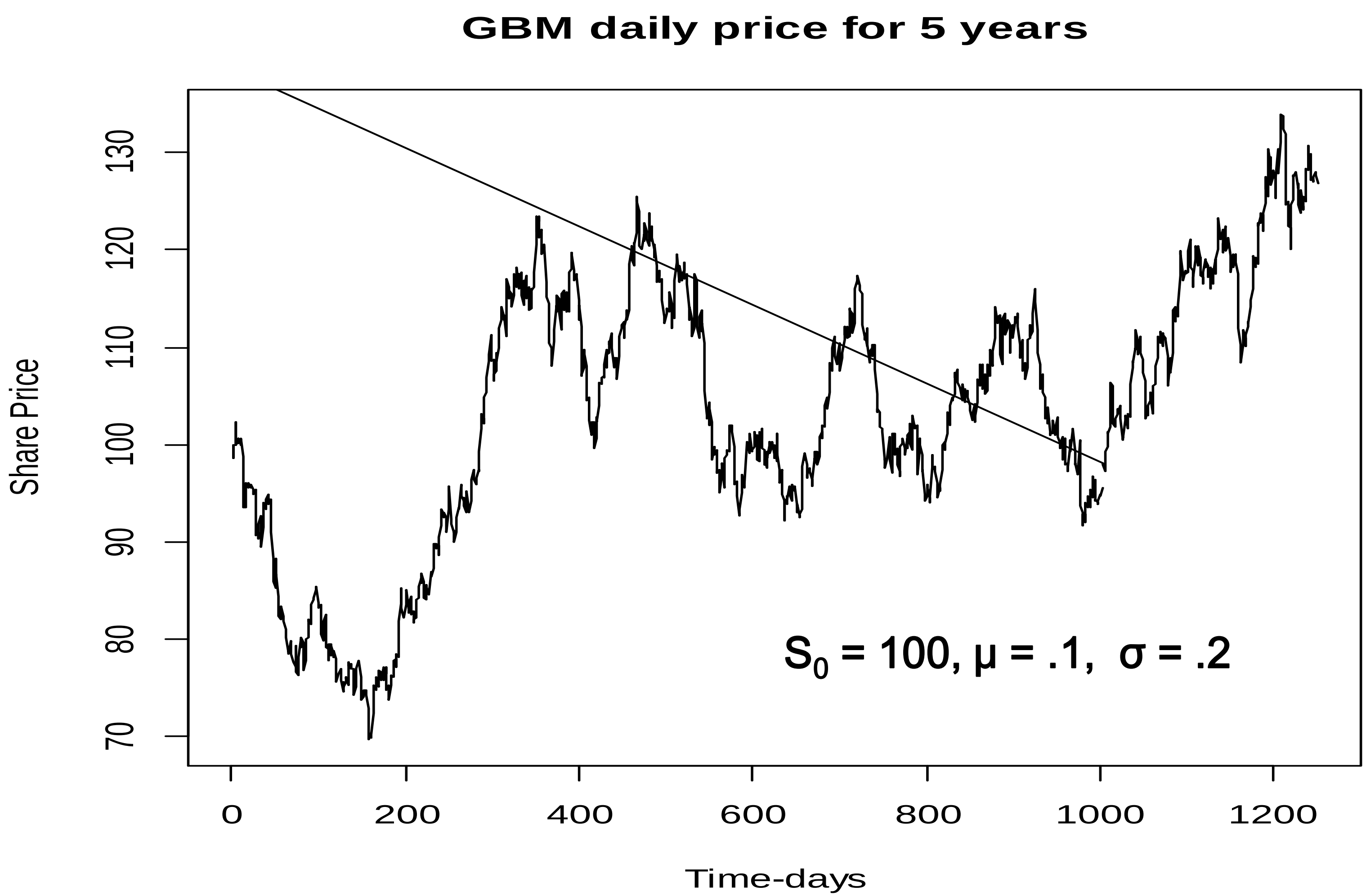
- วิธีที่ 2:
  - Δt = 3/250
  - ราคาของหุ้นตัวนี้ในวันแรก = 100
  - สุ่มตัวเลขจาก N(0,1) มา 1 ตัว = .11656

$$S_3 = S_0 \exp\left[\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma Z\sqrt{\Delta t}\right]$$

$$= 100 \times \exp\left[\left(.1 - \tfrac{1}{2} \times .2^2\right) \times \tfrac{3}{250} + .2 \times (.11656) \times \sqrt{\tfrac{3}{250}}\right]$$

$$= 100.352$$

Simulating GBM evolution



Estimating μ และ σ ของ GBM

- ใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า การประมาณค่าความควรจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation)
- เรารู้ว่าการแจกแจงของผลตอบแทน (ถ้ามองในแง่ของช่วงเวลาไม่ต่อเนื่อง) เป็นแบบปกติ

$$R_t = \ln S_t - \ln S_{t-\Delta t} \sim N\left(\alpha, \sigma^2 \Delta t\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t$$

Estimating μ และ σ ของ GBM

- ตัวประมาณค่า MLE ของ μ และ σ สามารถคำนวณได้ดังนี้

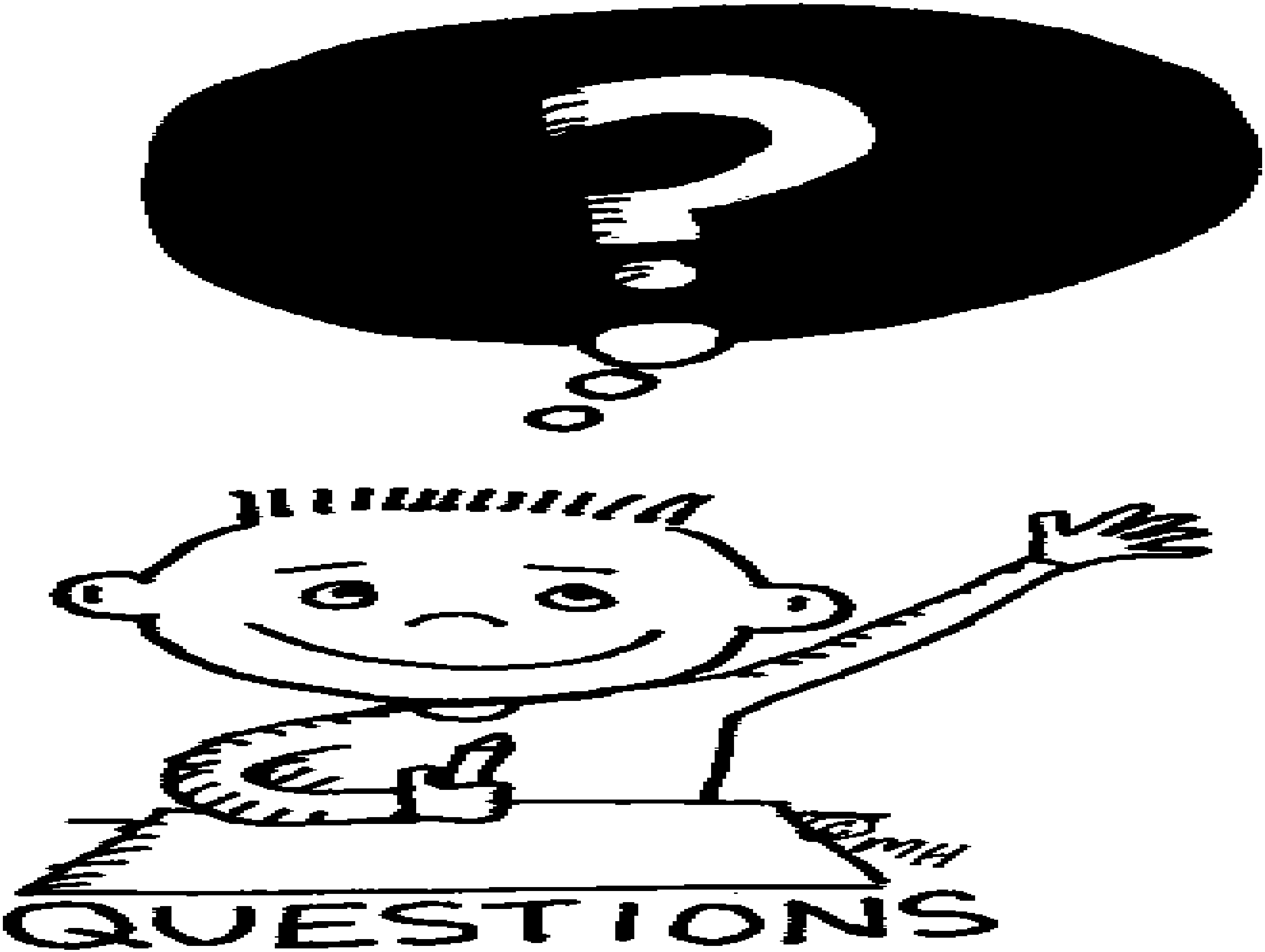
$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T\Delta t}\sum_{t=1}^{T}\left(R_t - \hat{\alpha}\right)^2$$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\hat{\alpha}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2$$

Estimating μ และ σ ของ GBM

- ตัวประมาณค่า MLE ของ α และ σ^2 ได้แก่ ค่าเฉลี่ยของผลตอบแทน และ $1/\Delta t \times$ (ค่าเฉลี่ยส่วนเบี่ยงเบนกำลังสองของผลตอบแทน) ตามลำดับ
- ตัวอย่าง: ใช้ข้อมูลผลตอบแทนรายวันของ Apple
  - $\Delta t = 1/250$
  - $\hat{\alpha}$ = ค่าเฉลี่ยของผลตอบแทน = 0.001208315
  - ค่าเฉลี่ยส่วนเบี่ยงเบนกำลังสองของผลตอบแทน = 0.0005868717
  - $\hat{\sigma^2} = 250 \times 0.0005868717 = 0.1467179$
  - $\hat{\mu} = (0.001208315 \times 250) + .5 \times 0.1467179 = 0.3754376$


QUESTIONS

- Email:
  - fbusnwk@ku.ac.th
- Homepage:
  - http://fin.bus.ku.ac.th/nattawoot.htm
- Phone:
  - 02-9428777 Ext. 1212
- Mobile:
  - 087- 5393525
- Office:
  - ชั้น 9 ตึกใหม่คณะบริหารธุรกิจ ม.เกษตรศาสตร์ บางเขน